# Mathématiques finanières

Les annuités

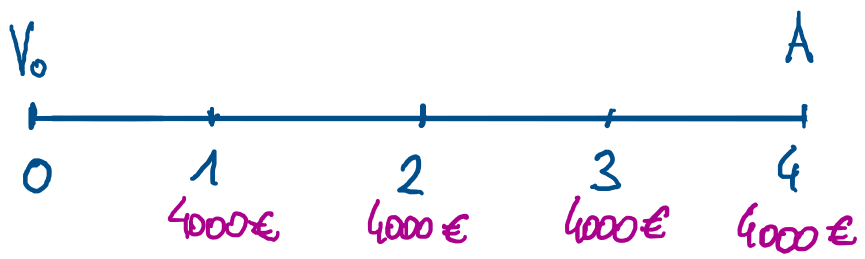
Programme 2DG

# Exercice 3 p.6

❸ Une personne doit rembourser une dette en 4 annuités, la première payable dans 1 an, la deuxième dans 2 ans, la troisième dans 3 ans, la quatrième dans 4 ans. Le montant de l'annuité constante est de 4.000 €.

La personne propose de s'acquitter en deux paiements d'égale valeur, le premier dans 1 an, le second dans 2 ans. On demande la valeur de la nouvelle annuité. Le taux d'intérêt est de 6%.

# Exercice 3 p.6




$i = 6\%$

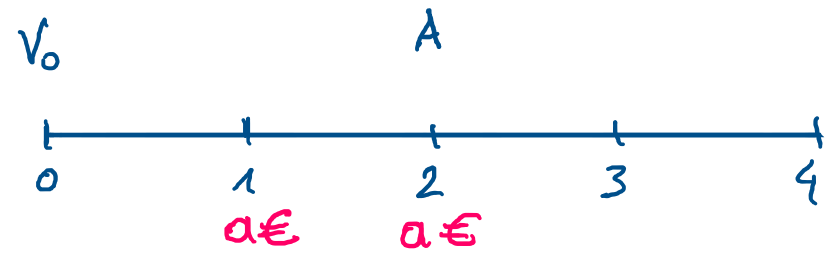
$$A = 4000 + (1+i)4000 + (1+i)^2 4000 + (1+i)^3 4000$$

$$= 4000\left[\underbrace{1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3}_{\frac{(1+i)^4-1}{i}}\right]$$

$$A = 4000\,\frac{(1+i)^4-1}{i}$$

$$V_0 = (1+i)^{-4} A$$

$$= 4000\,(1+i)^{-4}\,\frac{(1+i)^4-1}{i} \qquad \text{(eq.1)}$$




$i = 6\%$

$A =$ ----

⋮

$$V_0 = a(1+i)^{-2}\,\frac{(1+i)^2-1}{i} \qquad \text{(eq.2)}$$

En combinant (eq. 1) et (eq. 2) :

$$4000\,(1+i)^{-4}\,\frac{(1+i)^4-1}{i} = a\,(1+i)^{-2}\,\frac{(1+i)^2-1}{i}$$

$$a = \frac{4000\,(1+i)^2}{(1+i)^4}\cdot\underbrace{\frac{(1+i)^4-1}{(1+i)^2-1}}_{*}\cdot\frac{i}{i}$$

$$* : \frac{\left[\cancel{(1+i)^2-1}\right]\left[(1+i)^2+1\right]}{\cancel{(1+i)^2-1}}$$

$$= \frac{4000}{(1+i)^4}\cdot\left[(1+i)^2+1\right]$$

$$= \frac{4000}{1.06^4}\,\left(1,06^2+1\right)$$

$$\underline{a = 6728,36\ €}$$

$$4000\,(1+i)^{-4}\,\frac{(1+i)^4-1}{i} = a\,(1+i)^{-2}\,\frac{(1+i)^2-1}{i} \qquad \Big|\times(1+i)^2\,\frac{i}{(1+i)^2-1}$$

$$4000\,(1+i)^{-4}\,\frac{(1+i)^4-1}{i}\,(1+i)^2\,\frac{i}{(1+i)^2-1} = a\,(1+i)^{-2}\,\frac{(1+i)^2-1}{i}\,(1+i)^2\,\frac{i}{(1+i)^2-1}$$

$$4000\,(1+i)^{-4}\,\frac{(1+i)^4-1}{i}\,(1+i)^2\,\frac{i}{(1+i)^2-1} = a\,(1+i)^{-2}\,\frac{\cancel{(1+i)^2-1}}{i}\,(1+i)^2\,\frac{i}{\cancel{(1+i)^2-1}}$$

$$4000\,(1+i)^{-4}\,\frac{(1+i)^4-1}{i}\,(1+i)^2\,\frac{i}{(1+i)^2-1} = a\,\cancel{(1+i)^{-2}}\,\frac{\cancel{(1+i)^2-1}}{i}\,\cancel{(1+i)^2}\,\frac{i}{\cancel{(1+i)^2-1}}$$

$$4000\,(1+i)^{-4}\,\frac{(1+i)^4-1}{i}\,(1+i)^2\,\frac{i}{(1+i)^2-1} = a\,\cancel{(1+i)^{-2}}\,\frac{\cancel{(1+i)^2-1}}{\cancel{i}}\,\cancel{(1+i)^2}\,\frac{\cancel{i}}{\cancel{(1+i)^2-1}}$$

$$a = \frac{4000\cdot(1+i)^2}{(1+i)^4}\cdot\frac{(1+i)^4-1}{(1+i)^2-1}\cdot\frac{i}{i}$$

$$a = \frac{4000\cdot(1+i)^2}{(1+i)^4}\cdot\frac{(1+i)^4-1}{(1+i)^2-1}\cdot\cancel{\frac{i}{i}}$$

### Différence de deux carrés

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a = \frac{4000\cdot(1+i)^2}{(1+i)^4}\,\frac{[(1+i)^2-1]\times[(1+i)^2+1]}{(1+i)^2-1}$$

$$a = \frac{4000\cdot(1+i)^2}{(1+i)^4}\,\frac{[\cancel{(1+i)^2-1}]\times[(1+i)^2+1]}{\cancel{(1+i)^2-1}}$$

$$a = \frac{4000\,(1+i)^2}{(1+i)^4}\cdot\left[(1+i)^2+1\right]$$

# Exerice 4 p.6

❹ Vous vendez une moto d'occasion et l'acheteur vous propose les offres suivantes:

a) 1.200 € au comptant;

b) 1.550 € dans 5 ans;

c) 15 annuités de 115 € le premier versement se faisant immédiatement.

Quelle offre allez-vous choisir, sachant que le taux d'intérêt est de 4% l'an.

# Exercice 4 p. 6

Il faut convertir tous les cas en $V_0$ !

a) 1200 € au comptant $(= V_0)$

b) 1550 € dans 5 ans :

Attention: erreur dans la version précédente !

$$V_0 = (1+i)^{-5} \underbrace{\cancel{1500}}_{} \ 1550$$

A : valeur acquise dans 5 ans

$= \cancel{1324{,}35} €$ 1273.99 €

c) 15 annuités de 115 €, premier versement immédiatement :

$$A = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$n = 15$

$i = 4\%$

$a = 115$

c) suite :

$$A = 115 \cdot 1.04 \ \frac{1.04^{15} - 1}{0.04} = 2394{,}82 €$$

$$V_0 = (1+i)^{-15} A$$

$$= 1.04^{-15} \cdot 2394{,}82$$

$$= 1329{,}76 €$$

# Exercice 4 p. 6

Il faut convertir tous les cas en $V_0$ !

a) **1200 €** au comptant $(= V_0)$

b) 1550 € dans 5 ans :

$$V_0 = (1+i)^{-5} \underbrace{1500}$$

A : valeur acquise dans 5 ans

$$= \underline{1324,95\ €}$$

c) 15 annuités de 115 €, premier versement immédiatement :

$$A = a\,(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$n = 15$
$i = 4\%$
$a = 115$

c) suite :

$$A = 115 \cdot 1.04\,\frac{1.04^{15} - 1}{0.04} = 2394,82\ €$$

$$V_0 = (1+i)^{-15} A$$

$$= 1.04^{-15} \cdot 2394,82$$

$$= \underline{1329,76\ €}$$

Le vendeur a intérêt à choisir l'option c) !

# Exercice 6 p.7

❻ Une personne désire se constituer un capital en faisant 10 versements annuels. Un an après le dernier versement elle veut avoir épargné 150.000 €. Le taux de capitalisation étant de 5% l'an, calculez le montant du versement annuel.

Calculez le capital que la personne pourrait toucher 3 mois après le $6^e$ versement sachant que le taux de capitalisation est alors ramené à 4%.

# Exercice 6 p 7

$i = 5\%$ (an)

$A = 150000$ €

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | |

(i) $$150\,000 = a\,(1+0{,}05)\,\frac{(1+0.05)^{10}-1}{0.05}$$

$$a = \frac{150000 \cdot 0.05}{(1+0.05)\left[(1+0.05)^{10}-1\right]}$$

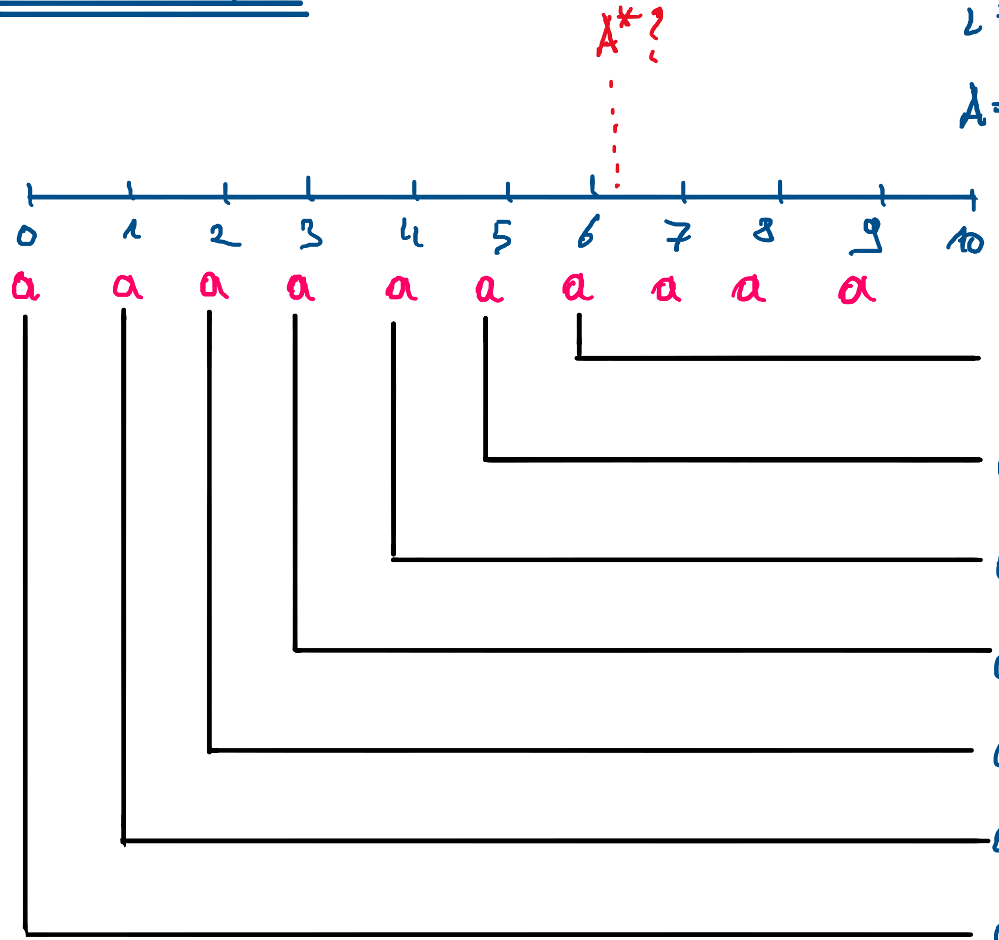
$$= \underline{11\,357{,}80 \text{ €}}$$

# Exercice 6 p 7

$i = 5\%$ (an)

$A = 150000$ €

(ii)




$a(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{12}(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{24}(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{36}(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{48}(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{60}(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{72}(1+i'_m)^3$

$i = 5\%$

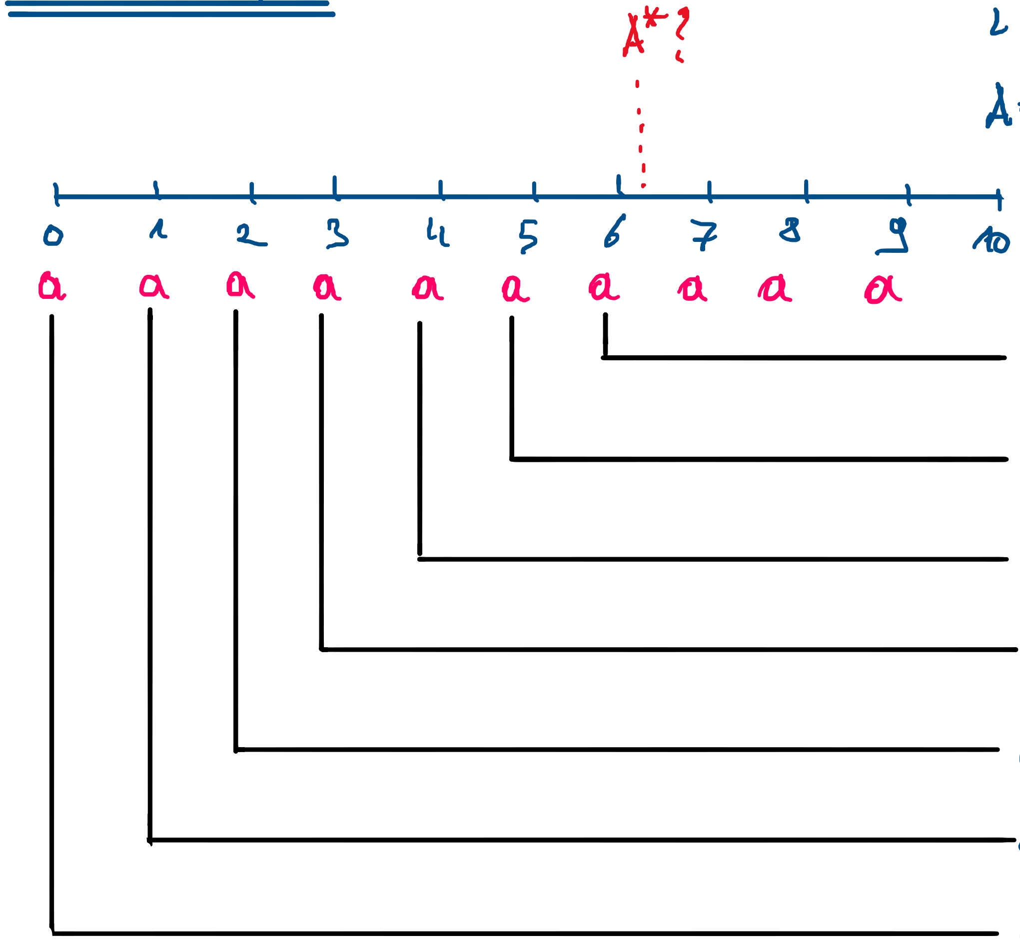
$i' = 4\%$

# Exercice 6 p 7

$i = 5\%$ (an)

$A = 150000$ €

(ii)




$a(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{12}(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{24}(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{36}(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{48}(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{60}(1+i'_m)^3$

$a(1+i_m)^{72}(1+i'_m)^3$

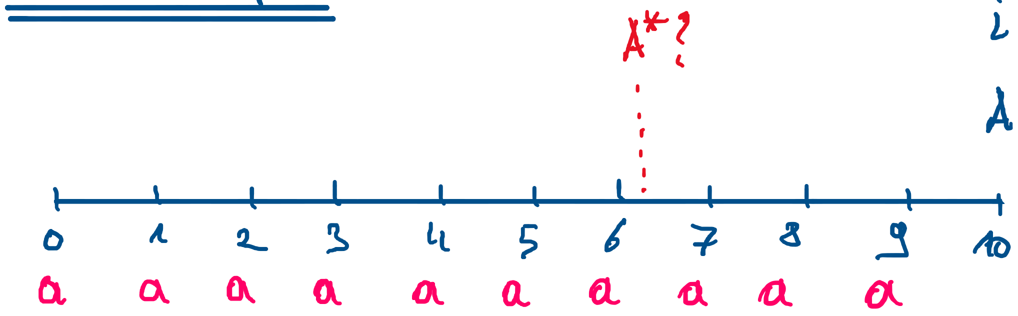
$$A^* = a(1+i'_m)^3 + a(1+i_m)^{12}(1+i'_m)^3 + a(1+i_m)^{24}(1+i'_m)^3 + a(1+i_m)^{36}(1+i'_m)^3 + a(1+i_m^{48})(1+i'_m)^3 \dots$$

$$\dots + a(1+i_m)^{60}(1+i'_m)^3 + a(1+i_m)^{72}(1+i'_m)^3$$

$$A^* = a(1+i'_m)^3 \Big[ \underbrace{1 + (1+i_m)^{12} + (1+i_m)^{24} + (1+i_m)^{36} + (1+i_m)^{48} + (1+i_m)^{60} + (1+i_m)^{72}}_{S} \Big]$$

S : progression géométrique croissante à raison $(1+i_m)^{12}$

# Exercice 6 p 7




$i = 5\%$ (an)

$A = 150000$ €

$$S = \frac{lq - a}{q-1}$$

$l$ : dernier terme
$q$ : raison
$a$ : premier terme

(ii) $A^* = a(1+i_m')^3 + a(1+i_m)^{12}(1+i_m')^3 + a(1+i_m)^{24}(1+i_m')^3 + a(1+i_m)^{36}(1+i_m')^3 + a(1+i_m^{48})(1+i_m')^3 \ldots$

$\ldots + a(1+i_m)^{60}(1+i_m')^3 + a(1+i_m)^{72}(1+i_m')^3$

$$A^* = a(1+i_m')^3\left[\underbrace{1 + (1+i_m)^{12} + (1+i_m)^{24} + (1+i_m)^{36} + (1+i_m)^{48} + (1+i_m)^{60} + (1+i_m)^{72}}_{S}\right]$$

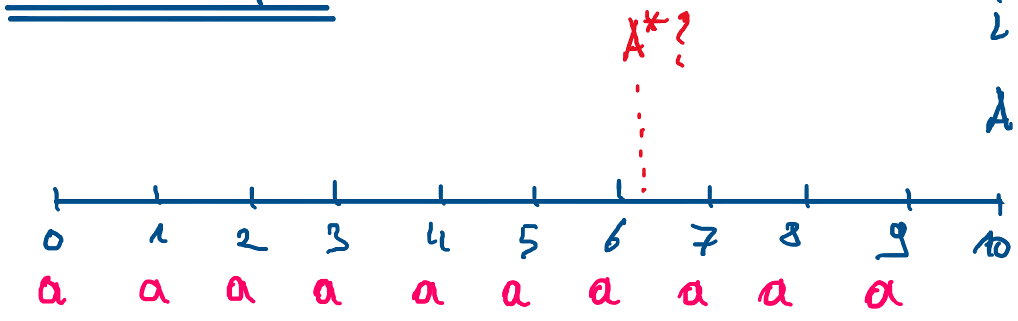
$S$ : progression geometrique croissante à raison $(1+i_m)^{12}$

$$S = \frac{(1+i_m)^{72}(1+i_m)^{12} - 1}{(1+i_m)^{12} - 1}$$

$$S = \frac{(1+i_m)^{84} - 1}{(1+i_m)^{12} - 1}$$

$$A^* = a(1+i_m')^3 \frac{(1+i_m)^{84} - 1}{(1+i_m)^{12} - 1}$$

## Exercice 6 p 7




$i = 5\%$ (an)

$A = 150000$ €

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}$$

$l$ : dernier terme
$q$ : raison
$a$ : premier terme

(ii) $$A^* = a(1+i'_m)^3 \, \frac{(1+i_m)^{84} - 1}{(1+i_m)^{12} - 1}$$

Il faut maintenant calculer le taux d'équivalence (voir cours 3DG) :

- $1 + 0.05 = (1 + i_m)^{12} \Leftrightarrow i_m = \sqrt[12]{1+0.05} - 1 = 0.4074\%$
- $1 + 0.04 = (1 + i'_m)^{12} \Leftrightarrow i'_m = \sqrt[12]{1+0.04} - 1 = 0.3274\%$

Donc :

~~$A^* = 951'023,05$ €~~

$A^* = 93386,57$ €

$$\boxed{A^* = a(1+i'_m)^3 \, \frac{(1+i)^7 - 1}{i}}$$

# Devoir à domicile

Exercice 7 pour Mardi (19/1/2021) soir