

# Mathématiques financières

Les intérêts composés

Rappel de la 3DG



# Formules

## Intérêts simples

Si la durée de placement est exprimée en années ( $a$ ), alors:

$$I = \frac{C \cdot t \cdot a}{100}$$

## Intérêts composés

Valeur acquise:

$$A = C(1 + i)^n$$



# Correction

Devoir à domicile



# Exercice 1

**Énoncé:** *Une personne a emprunté une somme de 30 000€ à intérêts composés au taux annuel de 11%. Quelle est le montant à rembourser après 3 ans et 6 mois?*



# Exercice 1

**Énoncé:** Une personne a emprunté une somme de 30 000€ à intérêts composés au taux annuel de 11%. Quelle est le **montant à rembourser** après 3 ans et 6 mois?

$$C = 30\,000 \text{ €}$$

taux annuel : 11%

3 ans et 6 mois = 7 semestres

Taux semestriel :

$$A = C(1 + 0.11) \quad \text{annuel} \quad (1)$$

$$A = C(1 + x)^2 \quad \text{semestriel} \quad (2)$$

(1) et (2) :  $C(1 + 0.11) = C(1 + x)^2$

$$1.11 = (1 + x)^2$$

$$\sqrt{1.11} = 1 + x \rightarrow x = \sqrt{1.11} - 1$$

$$\text{taux semestriel} = 5.35\%$$

$$A = 30\,000 (1 + 0.0535)^7$$
$$= 43\,225,11 \text{ €}$$



## Exercice 2

**Énoncé:** *Au bout de combien de temps une somme placée à intérêts composés, au taux de 3% par semestre, double-t-elle de valeur?*



## Exercice 2

**Énoncé:** *Au bout de combien de temps une somme placée à intérêts composés, au taux de 3% par semestre, double-t-elle de valeur?*

$$A = C(1 + 0,03)^x$$

$$2C = C(1 + 0.03)^x$$

$$2 = (1 + 0.03)^x$$

$$\log 2 = x \log 1.03$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 1.03} = 23,45 \text{ semestres}$$



# Exercices

Solution



- ③ Une personne place 18.000 € et prélève 34.697,80 € après 10 ans et 6 mois. Quel a été le taux de placement ?

$$A = C(1+i)^n$$

$$C = 18000$$

10 ans et 6 mois = 21 semestres

$$34697,80 = 18000(1+i)^{21}$$

$$(1+i)^{21} = \frac{34697,80}{18000}$$

$$1+i = \sqrt[21]{\frac{34697,80}{18000}}$$

$$i = \sqrt[21]{\frac{34697,80}{18000}} - 1$$

$$i = 0,0317$$

ou

$$3,17\%$$



- ④ Une personne emprunte 150.000 € à rembourser dans 5 ans. A l'échéance prévue la personne rembourse avec l'accord du prêteur 80.000 € et s'acquitte du montant restant dû 5 ans plus tard par un versement de 124.704,40 €. Quel est le taux unique de l'emprunt ?

$$A = C(1+i)^n$$

$$\begin{cases} A_1 = 150000(1+i)^5 & (1) \\ 124704,40 = (A_1 - 80000)(1+i)^5 & (2) \end{cases}$$

$$(1) : (1+i)^5 = \frac{A_1}{150000}$$

$$\rightarrow (2) : 124704,40 = (A_1 - 80000) \frac{A_1}{150000}$$

$$124704,40 = \frac{1}{150000} A_1^2 - \frac{80000}{150000} A_1$$

$$\frac{1}{150000} A_1^2 - \frac{80000}{150000} A_1 - 124704,40 = 0$$

Equation du second degré :  $ax^2 + bx + c = 0$

$$a = \frac{1}{150000}$$

$$b = -\frac{80000}{150000}$$

$$c = -124704,40$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3,61$$

$$A_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -102\ 497,93 \quad \text{à rejeter}$$

ou

$$A_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \underline{\underline{182\ 497,93}}$$



- ④ Une personne emprunte 150.000 € à rembourser dans 5 ans. A l'échéance prévue la personne rembourse avec l'accord du prêteur 80.000 € et s'acquitte du montant restant dû 5 ans plus tard par un versement de 124.704,40 €. Quel est le taux unique de l'emprunt ?

$$A = C(1+i)^n$$

$$\begin{cases} A_1 = 150000(1+i)^5 & (1) \\ 124704,40 = (A_1 - 80000)(1+i)^5 & (2) \end{cases}$$

$$(1) : (1+i)^5 = \frac{A_1}{150000} \quad (*)$$

$$\rightarrow (2) : 124704,40 = (A_1 - 80000) \frac{A_1}{150000}$$

$$124704,40 = \frac{1}{150000} A_1^2 - \frac{80000}{150000} A_1$$

$$A_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -102\,497,93 \quad \text{à rejeter}$$

$$\text{ou} \\ A_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 182\,497,93$$

$$\rightarrow (*) : (1+i)^5 = \frac{182\,497,93}{150\,000}$$

$$1+i = \sqrt[5]{\frac{182\,497,93}{150\,000}}$$

$$i = \sqrt[5]{\frac{182\,497,93}{150\,000}} - 1$$

$$i = 0,04 \quad \text{ou} \quad 4\%$$



- 5 Un capital de 30.000 € est resté placé à intérêts composés au taux annuel de 6% l'an pendant 2 ans. Pendant combien de temps ce capital aurait-il dû être placé au même taux à intérêts simples pour donner les mêmes intérêts ?

intérêts composés

$$\begin{aligned} A &= C(1+i)^n \\ &= 30000(1+0.06)^2 \\ &= 33708 \end{aligned}$$

intérêts simples

Différence entre capital et valeur acquise dans le cas des intérêts composés :

$$33708 - 30000 = 3708 \text{ €}$$

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100} \quad (\text{formule dans le cas des ans})$$

I : intérêt

C : capital prêté ou placé

t : taux d'intérêt

n : nombre d'années de placement

$$3708 = \frac{30000 \cdot 6 \cdot n}{100}$$

$$n = \frac{3708 \cdot 100}{30000 \cdot 6} = \underline{\underline{2,06 \text{ années}}}$$



# Exercice

Enoncé: Une personne place un capital de 12500€ sur un compte en banque à un taux annuel de 8%. Après combien de temps peut-elle retirer tout son avoir qui se chiffre à 27390,40€?



