

Mathématiques financières

Les intérêts composés

Rappel de la 3DG



Introduction

- Intérêts composés

On parle d'intérêts composés lorsque les intérêts gagnés sur un placement au cours d'une période vont être placés là au cours de la période suivante et donc vont produire eux-mêmes des intérêts on dira que les intérêts sont capitalisés



Intérêts simples – intérêts composés

Capital investi: 10 000€

	T=0	T=1	T=2	T=3
Intérêt simple (5%)	10 000€			
Intérêt composé (5%)	10 000€			



Intérêts simples – intérêts composés

Capital investi en début de T=0 : 10 000€

	T=0	T=1	T=2	T=3
Intérêt simple (5%)	10 000€	10 500€		
Intérêt composé (5%)	10 000€			

Intérêt *simple* en fin de T=0: $10\ 000\text{€} \times 0.05 = 500\text{€}$



Intérêts simples – intérêts composés

Capital investi en début de T=0 : 10 000€

	T=0	T=1	T=2	T=3
Intérêt simple (5%)	10 000€	10 500€	11 000€	
Intérêt composé (5%)	10 000€			

Intérêt *simple* en fin de T=1: $10\ 000\text{€} \times 0.05 = 500\text{€}$



Intérêts simples – intérêts composés

Capital investi en début de T=0 : 10 000€

	T=0	T=1	T=2	T=3
Intérêt simple (5%)	10 000€	10 500€	11 000€	11 500€
Intérêt composé (5%)	10 000€			

Intérêt *simple* en fin de T=2: $10\,000\text{€} \times 0.05 = 500\text{€}$



Intérêts simples – intérêts composés

Capital investi en début de T=0 : 10 000€

	T=0	T=1	T=2	T=3
Intérêt simple (5%)	10 000€	10 500€	11 000€	11 500€
Intérêt composé (5%)	10 000€	10 500€		

Intérêt *composé* en fin de T=0: $10\ 000\text{€} \times 0.05 = 500\text{€}$



Intérêts simples – intérêts composés

Capital investi en début de T=0 : 10 000€

	T=0	T=1	T=2	T=3
Intérêt simple (5%)	10 000€	10 500€	11 000€	11 500€
Intérêt composé (5%)	10 000€	10 500€	11 025€	

Intérêt *composé* en fin de T=1: **10 500€** x 0.05 = 525€



Intérêts simples – intérêts composés

Capital investi en début de T=0 : 10 000€

	T=0	T=1	T=2	T=3
Intérêt simple (5%)	10 000€	10 500€	11 000€	11 500€
Intérêt composé (5%)	10 000€	10 500€	11 025€	11 576.25€

Intérêt *composé* en fin de T=2: **11 025€** x 0.05 = 551.25€



Introduction

- Valeur acquise

Le capital placé reste invariable et produit des intérêts égaux pour chaque période de placement



Introduction

- Valeur acquise

Le capital placé reste invariable et produit des intérêts égaux pour chaque période de placement

- Valeur actuelle

Les intérêts sont considérés comme un nouveau placement et sont ajoutés au capital à la fin de chaque période pour produire des intérêts à leur tour.



Valeur acquise: Calcul

Exemple: *Un capital de 10 000€ est placé pendant 3 ans au taux annuel de 8%. Quelle est sa valeur acquise au bout des 3 ans?*



Valeur acquise: Calcul

Exemple: *Un capital de 10 000€ est placé pendant 3 ans au taux annuel de 8%. Quelle est sa valeur acquise au bout des 3 ans?*



Valeur acquise: Calcul

Exemple: *Un capital de 10 000€ est placé pendant 3 ans au taux annuel de 8%. Quelle est sa valeur acquise au bout des 3 ans?*

$$\begin{aligned}\text{Valeur acquise au bout d'un an} &= \text{Capital} + \text{Intérêts de l'année} \\ &= 10000 + 10000 \times 0,08 \\ &= 10000 (1 + 0,08)\end{aligned}$$



Valeur acquise: Calcul

Exemple: Un capital de 10 000€ est placé pendant 3 ans au taux annuel de 8%. Quelle est sa valeur acquise au bout des 3 ans?

$$\begin{aligned}\text{Valeur acquise au bout d'un an} &= \text{Capital} + \text{Intérêts de l'année} \\ &= 10000 + 10000 \times 0,08 \\ &= 10000 (1 + 0,08)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Valeur acquise au bout de 2 ans} &= \text{Valeur acquise au bout d'un an} + \text{Intérêts de l'année} \\ &= 10000 (1 + 0,08) + 10000 (1 + 0,08) \times 0,08 \\ &= 10000 (1 + 0,08) (1 + 0,08) \\ &= 10000 (1 + 0,08)^2\end{aligned}$$



Valeur acquise: Calcul

Exemple: Un capital de 10 000€ est placé pendant 3 ans au taux annuel de 8%. Quelle est sa valeur acquise au bout des 3 ans?

$$\begin{aligned}\text{Valeur acquise au bout d'un an} &= \text{Capital} + \text{Intérêts de l'année} \\ &= 10000 + 10000 \times 0,08 \\ &= 10000 (1 + 0,08)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Valeur acquise au bout de 2 ans} &= \text{Valeur acquise au bout d'un an} + \text{Intérêts de l'année} \\ &= 10000 (1 + 0,08) + 10000 (1 + 0,08) \times 0,08 \\ &= 10000 (1 + 0,08) (1 + 0,08) \\ &= 10000 (1 + 0,08)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Valeur acquise au bout de 3 ans} &= \text{Valeur acquise au bout de 2 ans} + \text{Intérêts de l'année} \\ &= 10000 (1 + 0,08)^2 (1 + 0,08) \\ &= 10000 (1 + 0,08)^3\end{aligned}$$



Valeur acquise: Calcul

Exemple: *Un capital de 10 000€ est placé pendant 3 ans au taux annuel de 8%. Quelle est sa valeur acquise au bout des 3 ans?*

$$\begin{array}{l} \text{Valeur acquise au bout de } n \\ \text{années de placement} \\ (A) \end{array} = C (1+i)^n$$

où i = taux de placement annuel
 n = durée du placement en années



Valeur actuelle: Calcul

Exemple: *Un placement effectué le 1/3/N a, au bout de 10 ans, acquis une valeur de 3257,79€ (taux de placement annuel: 5%). Quel est le montant du capital qui a été placé?*



Valeur actuelle: Calcul

Exemple: *Un placement effectué le 1/3/N a, au bout de 10 ans, acquis une valeur de 3257,79€ (taux de placement annuel: 5%). Quel est le montant du capital qui a été placé?*

$$A = C (1+i)^n \quad \Leftrightarrow \quad 3257,79 = C (1+0.05)^{10}$$

Alors
$$C = \frac{3257,79}{(1+0.05)^{10}} = 2000 \text{ €}$$



Taux de placement: Calcul

Exemple: *Un placement de 5000€ effectué le 1/5/N-2 a, au bout de 5 ans, acquis une valeur de 8811,71€. A quel taux le placement a-t-il été effectué?*



Taux de placement: Calcul

Exemple: Un placement de 5000€ effectué le 1/5/N-2 a, au bout de 5 ans, acquis une valeur de 8811,71€. A quel taux le placement a-t-il été effectué?

$$A = C(1+i)^n \quad \Leftrightarrow \quad 8811,71 = 5000(1+i)^5$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{8811,71}{5000} = (1+i)^5$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{8811,71}{5000}\right)^{\frac{1}{5}} = 1+i$$

$$\Leftrightarrow \quad i = \left(\frac{8811,71}{5000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad i = 0,12 \quad \text{donc} \quad \textcircled{12\%}$$



Temps de placement: Calcul

Exemple: *Un placement de 8000€ effectué le 1/7/N-4 au taux de 9% a acquis une valeur de 13 416,80€. Quelle a été la durée du placement?*



Temps de placement: Calcul

Exemple: Un placement de 8000€ effectué le 1/7/N-4 au taux de 9% a acquis une valeur de 13 416,80€. Quelle a été la durée du placement?

$$A = C(1+i)^n \Leftrightarrow 13416,80 = 8000(1+0,09)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{13416,80}{8000} = 1,09^n$$

$$\Leftrightarrow 1,6771 = 1,09^n$$

$$\Leftrightarrow \log(1,6771) = \log 1,09^n$$

$$\Leftrightarrow \log 1,6771 = n \cdot \log 1,09$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\log 1,6771}{\log 1,09} = 6$$

6ans



Taux proportionnels

Taux équivalents: Calcul

Exemple: *A quel taux mensuel un taux annuel de 10% est-il équivalent?*



Taux équivalents: Calcul

Exemple: A quel taux mensuel un taux annuel de 10% est-il équivalent?

Taux annuel connu : $A = C(1 + 0,10)$ (1)

Taux mensuel $A = C(1 + x)^{12}$ (2)

En utilisant (1) et (2) :

$$C(1 + 0,10) = C(1 + x)^{12} \Leftrightarrow 1,10 = (1 + x)^{12}$$

$$\Leftrightarrow 1,10^{1/12} = 1 + x$$

$$\Leftrightarrow x = 1,10^{1/12} - 1$$

$$= 0,00797 \approx 0,797$$



Exercice 1

Énoncé: *Une personne a emprunté une somme de 30 000€ à intérêts composés au taux annuel de 11%. Quelle est le montant à rembourser après 3 ans et 6 mois?*



Exercice 2

Énoncé: *Au bout de combien de temps une somme placée à intérêts composés, au taux de 3% par semestre, double-t-elle de valeur?*

